Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XVI,** 4.

ÜBER DIE NULLSTELLENVERTEILUNG EINER ANALYTISCHEN GRENZ-PERIODISCHEN FUNKTION

VON

KAI RANDER BUCH

KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
EJNAR MUNKSGAARD
1938

Printed in Denmark
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

§ 1.

Einleitung. Formulierung des Hauptsatzes.

Bevor wir unsere Aufgabe formulieren, wollen wir kurz einige der wichtigsten Eigenschaften der analytischen fastperiodischen Funktionen zusammenstellen[1].

Eine in einem vertikalen Streifen $\alpha < \sigma < \beta \, (-\infty \leqq \alpha < \beta \leqq +\infty)$ der komplexen $s = \sigma + it$— Ebene reguläre Funktion heisst fastperiodisch in (α, β), falls zu jedem $\varepsilon > o$ eine relativ dichte Menge von Verschiebungszahlen $\tau = \tau(\varepsilon) = \tau_f(\varepsilon)$ existiert, d. h. es gibt eine Länge $l = l(\varepsilon)$, so dass in jedem Intervall der Länge l auf der reellen Zahlenachse mindestens ein Punkt τ existiert, für welchen die Ungleichung

$$|f(s + i\tau) - f(s)| \leqq \varepsilon$$

für alle s des Streifens gilt. Ferner heisst eine reguläre Funktion fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$, falls sie in jedem »beschnittenen« Streifen $(\alpha <) \, \alpha_1 < \sigma < \beta_1 \, (< \beta)$ fastperiodisch ist. Überall werden eckige Klammern in diesem Sinne gebraucht. Es gilt der Satz, dass jede in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion in $[\alpha, \beta]$ beschränkt und gleichmässig stetig ist.

Zu jeder in $[\alpha, \beta]$ fastperiodischen Funktion $f(s)$ gehört eine Dirichletentwicklung

[1] Die Theorie der analytischen fastperiodischen Funktionen findet man in H. Bohr [1].

$$f(s) \sim \sum_n A_n e^{\Lambda_n \cdot s}$$

mit reellen Exponenten Λ_n und komplexen Koefficienten $A_n \neq 0$, welche ihrerseits die Funktion eindeutig bestimmt.

Die Eigenschaft der Fastperiodizität ist invariant bei Addition, Multiplikation und gleichmässigem Grenzübergang, und die Rechnungen spiegeln sich in den entsprechenden formalen Rechnungen mit den Dirichletentwicklungen wieder.

Über den Quotienten zweier fastperiodischen Funktionen hat H. Bohr den folgenden Satz bewiesen[1]:

Es sei $-\infty \leqq \alpha < \beta \leqq +\infty$, und es seien $f(s)$ und $g(s)$ zwei in $[\alpha, \beta]$ reguläre fastperiodische Funktionen, von denen $g(s)$ nicht identisch verschwindet. Ferner sei der Quotient $h(s) = \dfrac{f(s)}{g(s)}$ im ganzen Streifen (α, β) regulär, d. h. jede im Streifen (α, β) gelegene Nullstelle von $g(s)$ sei zugleich Nullstelle von $f(s)$, und zwar von mindestens eben so hoher Multiplizität. Dann ist dieser Quotient wiederum eine in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Fastperiodizität in $[\alpha, \beta]$ ist, dass $f(s)$ Grenzfunktion einer in $[\alpha, \beta]$ gleichmässig konvergierenden Folge von Exponentialpolynomen $p(s) = \sum_n a_n e^{\lambda_n \cdot s}$ mit reellen Exponenten λ_n und komplexen Koeffizienten a_n ist. Die Dirichletentwicklung entsteht aus diesen Polynomen durch formalen Grenzübergang.

Zu einer in $[\alpha, \beta]$ fastperiodischen Funktion

$$f(s) \sim \sum_n A_n e^{\Lambda_n \cdot s}$$

[1] H. Bohr [2].

gibt es immer eine Folge von Exponentialpolynomen

$$f_p(s) = \sum_{n=1}^{N_p} A_n^{(p)} e^{\Lambda_n^{(p)} s},$$

in welchen jeder Exponent $\Lambda_n^{(p)}$ einer der Exponenten Λ_n ist und welche gleichmässig in $[\alpha, \beta]$ gegen $f(s)$ konvergiert.

Unter dem Modul M_f einer fastperiodischen Funktion $f(s)$ versteht man den kleinsten Zahlenmodul, welcher die Exponenten der Funktion enthält, also die Gesamtheit aller Zahlen, welche auf mindestens eine Weise durch eine Linearkombination

$$h_1 \Lambda_{n_1} + \cdots + h_p \Lambda_{n_p}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $h_1, \cdots, h_p$ darstellbar sind.

Periodische Funktionen der Periode ip sind dadurch charakterisiert, dass die Exponenten ganzzahlige Vielfache der Zahl $\frac{2\pi}{p}$ sind; d. h. der Modul einer solchen Funktion ist in dem Modul aller ganzzahligen Vielfachen der Zahl $\frac{2\pi}{p}$ enthalten.

Grenzperiodische Funktionen der Grenzperiode ip sind dadurch charakterisiert, dass die Exponenten rationale Vielfache der Zahl $\frac{2\pi}{p}$ sind; d. h. der Modul einer solchen Funktion ist in dem Modul aller rationalen Vielfachen der Zahl $\frac{2\pi}{p}$ enthalten. Dabei ist zugleich jedes rationale Vielfache von ip eine Grenzperiode der Funktion. Die Eigenschaft der Grenzperiodizität mit der Grenzperiode ip ist offenbar bei Addition, Multiplikation und gleichmässigem Grenzübergang invariant.

Damit eine Funktion $f(s)$ in $[\alpha, \beta]$ grenzperiodisch der Grenzperiode ip ist, ist notwendig und hinreichend, dass man zu $\varepsilon > 0$ und jedem beschnittenen Streifen $(\alpha <)\, \alpha_1 < \sigma < \beta_1 \,(< \beta)$ eine rationale Zahl r mit der Eigenschaft finden kann, dass jedes ganzzahlige Vielfache der Zahl irp eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $f(s)$ im Streifen $[\alpha_1, \beta_1]$ ist. Aus dieser Charakterisierung folgt leicht durch Betrachtung des Bohrschen Beweises über den Quotienten, dass die Funktion $h(s)$ grenzperiodisch der Grenzperiode ip ist, wenn die Funktionen $f(s)$ und $g(s)$ beide grenzperiodische Funktionen der Grenzperiode ip sind[1].

Die Frage der Nullstellenverteilung einer analytischen fastperiodischen Funktion ist früher von B. Jessen[2] behandelt worden, wobei er die folgenden beiden Sätze bewiesen hat:

Satz A. Es sei $-\infty \leqq \alpha < \beta \leqq +\infty$ und $f(s) = f(\sigma + it)$ eine in $[\alpha, \beta]$ reguläre fastperiodische Funktion, die nicht identisch verschwindet. Dann ist für beliebiges positives T die Funktion

$$\varphi_f(\sigma; T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \log|f(\sigma + it)|\,dt$$

eine im Intervall $\alpha < \sigma < \beta$ stetige Funktion von σ. Für $T \to \infty$ strebt diese Funktion gleichmässig in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $\alpha < \sigma < \beta$ gegen eine stetige Grenzfunktion

[1] Der Beweis beruht nämlich darauf dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem beschnittenen Streifen $(\alpha <)\, \alpha_1 < \sigma < \beta_1\, (< \beta)$ ein $\eta > 0$ und einen beschnittenen Streifen $(\alpha <)\, \alpha_2 < \sigma < \beta_2\, (< \beta)$ derart gibt, dass jede zu η gehörige gemeinsame Verschiebungszahl von $f(s)$ und $g(s)$ im Streifen (α_2, β_2) eine zu ϵ gehörige Verschiebungszahl von $h(s)$ im Streifen (α_1, β_1) ist.

[2] B. Jessen [1]. Jessen beweist auch (was wir jedoch nicht benutzen werden), dass die Fuktion

$$\varphi_f(\sigma; \gamma, \delta) = \frac{1}{\delta - \gamma}\int_{\gamma}^{\delta} \log|f(\sigma + it)|\,dt$$

für $\delta - \gamma \to \infty$ gleichmässig in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $\alpha < \sigma < \beta$ gegen eine stetige Grenzfunktion $\varphi_f(\sigma) = \lim\limits_{(\delta - \gamma) \to \infty} \varphi_f(\sigma; \gamma, \delta)$ strebt. Für unsere Anwendungen wählen wir $\gamma = -T$ und $\delta = +T$.

$$\varphi_f(\sigma) = \lim_{T\to\infty} \varphi_f(\sigma; T).$$

$\varphi_f(\sigma)$ heisst die zur Funktion $f(s)$ gehörige Jensensche Funktion; sie ist eine konvexe Funktion von σ und bestimmt in der folgenden Weise die Verteilung der Nullstellen von $f(s)$: Ist $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$, und bezeichnen wir mit $N(\alpha', \beta'; T)$ die Anzahl der Nullstellen von $f(s)$ im Rechteck $\alpha' < \sigma < \beta'$, $-T < t < +T$, so existiert für $T \to \infty$, falls nur $\varphi_f(\sigma)$ in den Punkten α' und β' differenzierbar ist, der Grenzwert

$$H(\alpha', \beta') = \lim_{T\to\infty} \frac{N(\alpha', \beta'; T)}{2\,T},$$

und es gilt die Jensensche Formel

$$H(\alpha', \beta') = \frac{1}{2\,\pi}\big(\varphi'(\beta') - \varphi'(\alpha')\big).$$

Die Grösse $H(\alpha', \beta')$ wird als Häufigkeit der Nullstellen von $f(s)$ im Streifen $\alpha' < \sigma < \beta'$ bezeichnet. Für beliebige Werte von α' und β' treten an Stelle dieser Formel die allgemeineren Relationen

$$\frac{1}{2\,\pi}\big(\varphi'(\beta'-0) - \varphi'(\alpha'+0)\big) \leqq \varliminf_{T\to\infty} \frac{N(\alpha', \beta'; T)}{2\,T} \leqq$$
$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{N(\alpha', \beta'; T)}{2\,T} \leqq \frac{1}{2\,\pi}\big(\varphi'(\beta'+0) - \varphi'(\alpha'-0)\big).$$

Satz B. Die in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion $f(s)$ ist dann und nur dann im Streifen $(\alpha \leqq)\, \alpha_0 < \sigma < \beta_0\, (\leqq \beta)$ von Null verschieden, wenn ihre zugehörige Jensensche Funktion $\varphi_f(\sigma)$ in $\alpha_0 < \sigma < \beta_0$ linear ist. Ist dies der Fall, und ist $\varphi_f(\sigma) = \varkappa + \lambda\sigma$, so ist $f(s)$ eindeutig in der Form

$$f(s) = \varepsilon \cdot e^{\varkappa + \lambda s + g(s)}$$

darstellbar, wobei $|\varepsilon| = 1$ ist und $g(s)$ eine in $[\alpha_0, \beta_0]$ fastperiodische Funktion ohne konstantes Glied in der Dirichletentwicklung bedeutet. Ferner enthält der Modul M_f der Dirichletexponenten von $f(s)$ sowohl die Zahl λ als auch den Modul M_g der Dirichletexponenten von $g(s)$.

Im Anschluss an diese Sätze liegt es nahe zu fragen: Welche konvexen Funktionen $\varphi(\sigma), \alpha < \sigma < \beta$ können als Jensensche Funktion einer in $[\alpha, \beta]$ fastperiodischen Funktion vorkommen? Diese Frage können wir indessen nicht beantworten; aber die Vermutung ist naheliegend, dass jede konvexe Funktion diese Eigenschaft hat. Wir können auch die Frage etwas allgemeiner stellen, nämlich wie folgt: Gegeben sei ein beliebiger Zahlenmodul M; welche Bedingungen muss dann eine in $\alpha < \sigma < \beta$ konvexe Funktion $\varphi(\sigma)$ erfüllen, damit es eine in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion $f(s)$ gibt, für welche $\varphi_f(\sigma) = \varphi(\sigma)$ ist, wenn noch verlangt wird, dass der Modul M_f der Dirichletexponenten von $f(s)$ gleich M oder in M enthalten ist?

Auf Grund des oben erwähnten Satzes B haben wir sofort die notwendige Bedingung, dass $\varphi'(\sigma)$ in den eventuellen Konstanzintervallen nur Werte aus M annimmt. Hinreichend ist aber diese Bedingung nicht in allen Fällen; besteht z. B. der Modul M aus allen ganzzahligen Vielfachen der Zahl $\frac{2\pi}{p}$, d. h. handelt es sich um die Charakterisierung derjenigen konvexen Funktionen $\varphi(\sigma)$, die als Jensensche Funktion einer periodischen Funktion $f(s)$ der Periode ip vorkommen können, so findet man als weitere notwendige Bedingung, dass $\varphi(\sigma)$ stückweise linear ist. Beide Bedingungen zusammen sind in diesem Falle hinreichend. Für beliebige Modulen M scheint die Frage sehr schwierig zu sein; dagegen wollen wir sie in dem speziellen Falle, wo der Modul M aus allen rationalen Vielfachen der Zahl $\frac{2\pi}{p}$ besteht, beantworten, d. h. wo es sich um die Charakterisierung derjenigen konvexen Funktionen $\varphi(\sigma)$ handelt, die als Jensensche Funktion einer grenzperiodischen Funktion $f(s)$ der Grenzperiode ip vorkommen können. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist zu zeigen, dass die oben gefundene notwendige Bedingung zugleich hinreichend ist; es gilt nämlich der folgende Hauptsatz.

Satz 1. Es seien gegeben der Modul M, der aus allen rationalen Vielfachen der Zahl $\frac{2\pi}{p}$ besteht, sowie eine konvexe Funktion $\varphi(\sigma)$, $\alpha < \sigma < \beta$, für welche $\varphi'(\sigma)$ in den eventuellen Konstanzintervallen nur Werte aus M annimmt. Dann ist es möglich eine in $[\alpha, \beta]$ analytische grenzperiodische Funktion $f(s)$ der Grenzperiode ip zu bestimmen, deren Jensensche Funktion gleich der gegebenen konvexen Funktion ist; d. h. es gilt $\varphi_f(\sigma) = \varphi(\sigma)$.

Für Ratschläge bei der Ausarbeitung der vorliegenden Untersuchung bin ich Prof. B. Jessen zu grossem Dank verpflichtet.

§ 2.

Zurückführung des Hauptsatzes auf einen Spezialfall.

In diesen Paragraphen wollen wir den in der Einleitung formulierten Satz 1 auf den folgenden Spezialfall zurückführen:

Satz 2. Es seien gegeben der Modul M, der aus allen rationalen Vielfachen der Zahl $\frac{2\pi}{p}$ besteht, sowie eine konvexe Funktion $\varphi(\sigma), -\infty < \sigma < +\infty$, für welche $\varphi'(\sigma)$ in den eventuellen Konstanzintervallen nur Werte aus M annimmt. Es gebe ferner zwei Zahlen γ und δ, $\gamma < \delta$ mit der Eigenschaft, dass $\varphi(\sigma)$ auf jeder der beiden Halbgeraden $\sigma \leq \gamma$ und $\sigma \geq \delta$ linear ist. Dann ist es möglich eine in $[-\infty, \infty]$ analytische grenzperiodische Funktion $f(s)$ der Grenzperiode ip zu bestimmen, deren Jensensche Funktion gleich der gegebenen konvexen Funktion ist; d. h. es gilt $\varphi_f(\sigma) = \varphi(\sigma)$.

Um aus diesem Satz den Satz 1 zu folgern, verfahren wir ähnlich wie beim Beweis des Weierstrassschen Produktsatzes folgendermassen:

Sei $\varphi(\sigma)$, $\alpha < \sigma < \beta$, die gegebene konvexe Funktion. Mit A bezeichnen wir die Menge der Punkte der σ-Achse, in welchen $\varphi(\sigma)$ eine der folgenden zwei Eigenschaften hat

1) $\varphi(\sigma)$ differenzierbar mit $\varphi'(\sigma)$ in M,

2) $\varphi(\sigma)$ nicht differenzierbar.

Es ist klar, dass die Punktmenge A überall dicht auf der σ-Achse liegt.

In der Punktmenge A definieren wir jetzt eine Funktion $\varrho(\sigma)$ folgendermassen

$$\varrho(\sigma) = \begin{cases} \varphi'(\sigma), \text{ wenn } \varphi(\sigma) \text{ differenzierbar ist,} \\ r \cdot \dfrac{2\pi}{p}, \text{ wo } r \text{ rational ist und der Ungleichung} \\ \varphi'(\sigma - 0) < r \cdot \dfrac{2\pi}{p} < \varphi'(\sigma + 0) \text{ genügt, wenn } \varphi(\sigma) \\ \quad \text{nicht differenzierbar ist.} \end{cases}$$

Die Werte der Funktion $\varrho(\sigma)$ gehören dann alle dem Modul M an.

Wir wählen jetzt aus der Menge A zwei Folgen von Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ und $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$, derart dass

$$\alpha < \ldots < \gamma_3 < \gamma_2 < \gamma_1 < \delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < \ldots < \beta,$$

und $\delta_n \to \beta$ und $\gamma_n \to \alpha$ für $n \to \infty$. Für jeden Wert von n definieren wir eine konvexe Funktion $\psi_n(\sigma), -\infty < \sigma < +\infty$, in der folgenden Weise

$$\psi_n(\sigma) = \begin{cases} \varrho(\gamma_n)(\sigma - \gamma_n) + \varphi(\gamma_n) & \text{für} \quad \sigma \leqq \gamma_n, \\ \varphi(\sigma) & \text{für} \quad \gamma_n < \sigma < \delta_n, \\ \varrho(\delta_n)(\sigma - \delta_n) + \varphi(\delta_n) & \text{für} \quad \sigma \geqq \delta_n. \end{cases}$$

Nun gilt

$$\psi_1(\sigma) \leqq \psi_2(\sigma) \leqq \ldots,$$

und ferner ist klar, dass $\psi_n(\sigma)$ im Intervalle $\alpha < \sigma < \beta$ gegen $\varphi(\sigma)$ strebt. Definieren wir jetzt eine andere Folge von Funktionen,

$$\varphi_1(\sigma) = \psi_1(\sigma),$$

und für $n \geqq 2$

$$\varphi_n(\sigma) = \psi_n(\sigma) - \psi_{n-1}(\sigma),$$

so gilt offenbar in $\alpha < \sigma < \beta$

$$\varphi(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\sigma).$$

Jede der Funktionen $\varphi_n(\sigma)$ genügt den Bedingungen des Satzes 2; $\varphi_n(\sigma)$ ist nämlich eine für $-\infty < \sigma < +\infty$ konvexe Funktion, welche für $\sigma \leqq \gamma_n$ und $\sigma \geqq \delta_n$ linear mit $\varphi_n'(\sigma)$ in M ist. Es gibt also eine in $[-\infty, \infty]$ analytische grenzperiodische Funktion $f_n(s)$, für welche $\varphi_{f_n}(\sigma) = \varphi_n(\sigma)$ ist.

Für $n \geqq 2$ ist die Funktion $\varphi_n(\sigma)$ im Intervalle $\gamma_{n-1} < \sigma < \delta_{n-1}$ gleich Null; nach dem Satze B der Einleitung ist also $f_n(s)$ für $\gamma_{n-1} < \sigma < \delta_{n-1}$ eindeutig in der Form

$$f_n(s) = \varepsilon_n e^{g_n(s)}$$

darstellbar; wobei $|\varepsilon_n| = 1$ und $g_n(s)$ eine in $[\gamma_{n-1}, \delta_{n-1}]$ grenzperiodische Funktion der Grenzperiode ip ohne konstantes Glied in der Dirichletentwicklung ist.

Es sei jetzt $n \geqq 3$. Dann ist es möglich ein Exponentialpolynom $g_n^*(s)$ ohne konstantes Glied und mit Exponenten aus M, also eine analytische grenzperiodische Funktion der Grenzperiode ip zu bestimmen, für welche

$$|g_n(s) - g_n^*(s)| < \frac{1}{2^n}$$

für $\gamma_{n-2} < \sigma < \delta_{n-2}$.

Die Funktion $\frac{1}{\varepsilon_n} e^{-g_n^*(s)}$ ist dann eine in $[-\infty, \infty]$ analytische grenzperiodische Funktion der Grenzperiode ip, deren Jensensche Funktion nach dem Satze B identisch gleich Null ist. Wählen wir also

$$f_n^*(s) = f_n(s) \frac{1}{\varepsilon_n} e^{-g_n^*(s)} = e^{g_n(s) - g_n^*(s)},$$

dann ist $f_n^*(s)$ eine in $[-\infty, \infty]$ analytische grenzperiodische Funktion der Grenzperiode ip, für welche

$$\varphi_{f_n^*}(\sigma) = \varphi_{f_n}(\sigma) = \varphi_n(\sigma)$$

in $-\infty < \sigma < \infty$ gilt. Ferner ist für $\gamma_{n-2} < \sigma < \delta_{n-2}$

$$e^{-\frac{1}{2^n}} < |f_n^*(s)| < e^{\frac{1}{2^n}}.$$

Hieraus folgt, dass das unendliche Produkt

$$f(s) = f_1(s) \cdot f_2(s) \prod_{n=3}^{\infty} f_n^*(s)$$

in $[\alpha, \beta]$ gleichmässig konvergent ist. Da jeder Faktor des Produktes eine in $[\alpha, \beta]$ grenzperiodische Funktion der Grenzperiode ip ist, ist auch $f(s)$ eine solche Funktion. Die dieser Funktion entsprechende Jensensche Funktion ist nun gleich der gegebenen konvexen Funktion $\varphi(\sigma)$; denn für jedes $n \geqq 3$ gilt im Streifen $\gamma_{n-2} < \sigma < \delta_{n-2}$

$$f(s) = f_1(s) f_2(s) \ldots f^*_{n-1}(s) \prod_{\nu=n}^{\infty} f^*_\nu(s),$$

wo

$$e^{-\frac{1}{2^\nu}} < |f^*_\nu(s)| < e^{\frac{1}{2^\nu}} \text{ für jedes } \nu \geqq n;$$

also ist

$$\log|f(s)| = \log|f_1(s)| + \log|f_2(s)| + \cdots + \log|f^*_{n-1}(s)| + \sum_{\nu=n}^{\infty} \log|f^*_\nu(s)|,$$

wo die letzte Reihe durch die Reihe $\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{2^\nu}$ majorisiert wird, und hieraus folgt sofort

$$\varphi_f(\sigma) = \varphi_{f_1}(\sigma) + \varphi_{f_2}(\sigma) + \cdots + \varphi_{f_{n-1}}(\sigma) + \sum_{\nu=n}^{\infty} \varphi_{f_\nu}(\sigma) = \varphi(\sigma).$$

§ 3.

Einleitende Konstruktionen zum Beweis des Hauptsatzes. Konstruktion einer brauchbaren Nullstellenmenge.

In den folgenden beiden Paragraphen wollen wir den Satz 2 beweisen.

Sei $\varphi(\sigma), -\infty < \sigma < +\infty$, die gegebene konvexe Funktion, $\varphi'(\sigma) = r_1 \cdot \frac{2\pi}{p}$ für $\sigma < \gamma$ und $= r_2 \frac{2\pi}{p}$ für $\sigma > \delta$. Wir bemerken, dass der Satz im Fall $r_1 = r_2$ trivial ist; in diesem Fall gilt ja $\varphi(\sigma) = \varkappa + \lambda\sigma, -\infty < \sigma < +\infty$, wo λ in M liegt, also ist die Funktion $f(s) = e^{\varkappa + \lambda s}$ grenzperiodisch der Grenzperiode ip, und es gilt offenbar $\varphi_f(\sigma) = \varkappa + \lambda\sigma$. Wir können deshalb im folgenden $r_1 < r_2$ annehmen.

In diesem Paragraphen werden wir, von der gegebenen konvexen Funktion $\varphi(\sigma)$ ausgehend, eine Punktmenge S konstruieren, die dann in § 4 als Nullstellenmenge der Funktion $f(s)$ benutzt werden soll. Die Punktmenge S muss deshalb im Streifen $\gamma \leqq \sigma \leqq \delta$ gelegen sein. Jeder Punkt von S soll eine zweifache Nullstelle von $f(s)$ sein. Da für $\alpha' < \gamma$ und $\beta' > \delta$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\varphi'(\beta') - \varphi'(\alpha')\right) = \frac{r_2 - r_1}{p}$$

ist, muss also, wenn mit $N(T)$ die doppelte Anzahl der Punkte von S im Streifen $-T < t < +T$ bezeichnet wird, die Relation

$$\lim_{T \to \infty} \frac{N(T)}{2T} = \frac{r_2 - r_1}{p}$$

erfüllt sein.

Wir wollen es so einrichten, dass S aus je einem Punkt der Geraden

$$t = k \cdot q, q = \frac{2p}{r_2 - r_1}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

besteht. Dabei ist natürlich die Wahl von q mit Rücksicht auf die obige Limesrelation getroffen worden. Den auf der Geraden $t = k \cdot q$ liegenden Punkt von S bezeichnen wir mit $\sigma(k) + ikq$; die Menge S wird dann durch die Funktion

$$\sigma = \sigma(k)$$

angegeben.

Die Konstruktion von S, d. h. von $\sigma(k)$, beruht nun darauf, dass wir eine Folge von stückweise linearen konvexen Funktionen $\varphi_n(\sigma)$ konstruieren, die gegen $\varphi(\sigma)$ strebt. Die rationalen Zahlen zwischen r_1 und r_2 werden in eine Folge

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$$

geordnet, und für jedes n bezeichnen wir mit $\psi_n(\sigma)$ diejenige lineare Funktion, deren Bild die Stützgerade der Neigung $r_n \cdot \frac{2\pi}{p}$ der Kurve $\varphi(\sigma)$ ist. Setzen wir dann

$$\varphi_n(\sigma) = \operatorname{Max}\left\{\psi_1(\sigma), \psi_2(\sigma), \ldots, \psi_{n+1}(\sigma)\right\},$$

so gilt offenbar $\varphi_n(\sigma) \to \varphi(\sigma)$, sogar gleichmässig für alle σ.

Für jedes n bezeichnen wir mit $r_1^n, r_2^n, \ldots, r_{n+1}^n$ diejenige Permutation der Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$, für welche $r_1^n < r_2^n < \ldots < r_{n+1}^n$ ist, und mit $\psi_1^n(\sigma), \psi_2^n(\sigma), \ldots, \psi_{n+1}^n(\sigma)$ die entsprechende Permutation von $\psi_1(\sigma), \psi_2(\sigma), \ldots, \psi_{n+1}(\sigma)$[1]. Dann ist auch

$$\varphi_n(\sigma) = \operatorname{Max}\left\{\psi_1^n(\sigma), \psi_2^n(\sigma), \ldots, \psi_{n+1}^n(\sigma)\right\}.$$

Es sei σ_j^n die Abszisse des Schnittpunktes der Kurven $\psi_j^n(\sigma)$ und $\psi_{j+1}^n(\sigma)$; dann ist offenbar $\sigma_1^n \leqq \sigma_2^n \leqq \ldots \leqq \sigma_n^n$. Jedem σ_j^n ordnen wir die Differenz $p_j^n = (r_{j+1}^n - r_j^n)\frac{2\pi}{p}$ zwischen den Neigungen von $\psi_{j+1}^n(\sigma)$ und $\psi_j^n(\sigma)$ zu. Für jedes n verhalten sich die Zahlen $p_1^n, p_2^n, \ldots, p_n^n$ zu einander wie ein System von teilerfremden natürlichen Zahlen $P_1^n, P_2^n, \ldots, P_n^n$, deren Summe wir mit Q_n bezeichnen.

Der Übergang von $\varphi_n(\sigma)$ zu $\varphi_{n+1}(\sigma)$ geschieht durch Hinzunahme einer weiteren Stützgeraden, nämlich der Geraden $\psi_{n+2}(\sigma)$. Das $(n+2)$-Tupel $r_1^{n+1}, r_2^{n+1}, \ldots, r_{n+2}^{n+1}$ entsteht also aus dem $(n+1)$-Tupel $r_1^n, r_2^n, \ldots, r_{n+1}^n$ durch Einschiebung der Zahl r_{n+2}; es sei etwa

$$r_{j_n}^n < r_{n+2} < r_{j_n+1}^n.$$

Dann unterscheidet sich das zu $\varphi_{n+1}(\sigma)$ gehörige $(n+1)$-

[1] Für jedes n gilt offenbar $r_1^n = r_1$, $r_{n+1}^n = r_2$.

Tupel $\sigma_1^{n+1}, \sigma_2^{n+1}, \ldots, \sigma_{n+1}^{n+1}$ von dem zu $\varphi_n(\sigma)$ gehörigen n-Tupel $\sigma_1^n, \sigma_2^n, \ldots, \sigma_n^n$ dadurch, dass an Stelle von $\sigma_{j_n}^n$ die beiden Zahlen $\sigma_{j_n}^{n+1}$ und $\sigma_{j_n+1}^{n+1}$ getreten sind; für $j < j_n$ gilt $\sigma_j^n = \sigma_j^{n+1}$, und für $j > j_n$ gilt $\sigma_j^n = \sigma_{j+1}^{n+1}$. Für die zugeordneten Zahlen p_j^n hat man

$$p_j^n = \begin{cases} p_j^{n+1} & \text{für } j < j_n, \\ p_j^{n+1} + p_{j+1}^{n+1} & \text{für } j = j_n, \\ p_{j+1}^{n+1} & \text{für } j > j_n. \end{cases}$$

Hieraus folgt sofort, dass Q_n ein Teiler von Q_{n+1} ist, und

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} \cdot P_j^n = \begin{cases} P_j^{n+1} & \text{für } j < j_n, \\ P_j^{n+1} + P_{j+1}^{n+1} & \text{für } j = j_n, \\ P_{j+1}^{n+1} & \text{für } j > j_n. \end{cases}$$

Zu jeder der Funktionen $\varphi_n(\sigma)$ definieren wir jetzt eine Punktmenge S_n, welche aus je einem Punkt der Geraden $t = k \cdot q$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ besteht. Bezeichnen wir den auf der Geraden $t = k \cdot q$ liegenden Punkt von S_n mit $\sigma_n(k) + ikq$, so wird die Punktmenge S_n durch die Funktion

$$\sigma = \sigma_n(k)$$

gegeben. Es handelt sich also darum diese Funktion $\sigma_n(k)$ zu definieren.

Auf Grund der obigen Relationen können wir offenbar für jedes n die Menge K aller ganzen Zahlen k derart in n disjunkte Mengen $K_1^n, K_2^n, \ldots, K_n^n$ zerlegen, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) Die Menge K_j^n besteht aus P_j^n Restklassen mod. Q_n.

2) Für jedes n gilt

$$K_j^n = \begin{cases} K_j^{n+1} & \text{für } j < j_n, \\ K_j^{n+1} + K_{j+1}^{n+1} & \text{für } j = j_n, \\ K_{j+1}^{n+1} & \text{für } j > j_n. \end{cases}$$

Es sei eine Folge von derartigen Zerlegungen von K fest gewählt; wir definieren dann die Funktion $\sigma_n(k)$ und damit die Menge S_n dadurch, dass wir $\sigma_n(k) = \sigma_j^n$ für alle k der Menge K_j^n setzen. Jede dieser Mengen S_n erfüllt dann die folgenden Bedingungen:

1) S_n gehört dem Streifen $\gamma \leqq \sigma \leqq \delta$ an und ist periodisch mit der Periode $iQ_n q$.

2) Die Punkte von S_n liegen alle auf den durch die Nichtdifferenzierbarkeitspunkte von $\varphi_n(\sigma)$ gehenden Geraden, und zwar ist die Anzahl der einer Periode von S_n angehörigen Punkte auf einer dieser Geraden $\sigma = \sigma_0$ dem zugehörigen Sprung $\varphi_n'(\sigma_0 + 0) - \varphi_n'(\sigma_0 - 0)$ proportional. Also gilt, wenn $N_n(\alpha', \beta'; T)$ die doppelte Anzahl der im Rechteck $\alpha' < \sigma < \beta', -T < t < T$ liegenden Punkte von S_n bedeutet, für beliebige Punkte α' und β' eine Relation

$$\lim_{T \to \infty} \frac{N_n(\alpha', \beta'; T)}{2T} = c_n \cdot \left(\varphi_n'(\beta' - 0) - \varphi_n'(\alpha' + 0)\right),$$

wo c_n eine von α' und β' unabhängige Konstante ist. Wählen wir insbesondere $\alpha' < \gamma$ und $\beta' > \delta$, so erhalten wir

$$\lim_{T \to \infty} \frac{N_n(\alpha', \beta'; T)}{2T} = \frac{2}{q} = \frac{r_2 - r_1}{p}, \; \varphi_n'(\beta') - \varphi_n'(\alpha') = \frac{2\pi}{p}(r_2 - r_1),$$

also

$$c_n = \frac{1}{2\pi}.$$

Für beliebige α' und β' gilt also

$$\lim_{T\to\infty}\frac{N_n(\alpha',\beta';T)}{2T}=\frac{1}{2\pi}\Big(\varphi_n'(\beta'-0)-\varphi_n'(\alpha'+0)\Big).$$

Die gewünschte Menge S entsteht nun durch einen Grenzübergang. Wir wollen zeigen dass die Funktionenfolge

$$\sigma_1(k),\,\sigma_2(k),\,\ldots,\,\sigma_n(k),\,\ldots$$

für $n\to\infty$ gleichmässig in k gegen eine Funktion $\sigma(k)$ strebt; diese Funktion $\sigma(k)$ definiert dann die gewünschte Menge S. Zum Beweis werde das Intervall $\gamma\leqq\sigma\leqq\delta$ in endlich viele Teilintervalle der Länge $\leqq\frac{\varepsilon}{2}$ zerlegt und in jedem Teilintervall ein Punkt der Menge A gewählt. Der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden dieser Punkte ist $\leqq\varepsilon$. Es seien

$$r_{n_1}\frac{2\pi}{p},\,r_{n_2}\frac{2\pi}{p},\,\ldots,\,r_{n_m}\frac{2\pi}{p}$$

die Werte der Funktion $\varrho(\sigma)$ in diesen Punkten und $N=N(\varepsilon)=\mathrm{Max}\{n_1,n_2,\ldots,n_m\}$. Dann gilt offenbar

$$|\sigma_n(k)-\sigma_{n+p}(k)|\leqq\varepsilon \text{ für alle } n>N(\varepsilon) \text{ und alle } p\geqq 0.$$

In diesem Paragraphen wollen wir noch beweisen, dass für beliebige Punkte α' und β' die Relationen

$$\frac{1}{2\pi}\Big(\varphi'(\beta'-0)-\varphi'(\alpha'+0)\Big)\leqq\varliminf_{T\to\infty}\frac{N(\alpha',\beta';T)}{2T}$$
$$\leqq\varlimsup_{T\to\infty}\frac{N(\alpha',\beta';T)}{2T}\leqq\frac{1}{2\pi}\Big(\varphi'(\beta'+0)-\varphi'(\alpha'-0)\Big)$$

gelten, wenn mit $N(\alpha',\beta';T)$ die doppelte Anzahl der im Rechteck $\alpha'<\sigma<\beta',\,-T<t<T$ liegenden Punkte von S bezeichnet wird.

Für ein beliebiges $\varepsilon < \dfrac{\beta' - \alpha'}{2}$ gilt

$$\frac{N(\alpha', \beta'; T)}{2\,T} \geqq \frac{N_n(\alpha' + \varepsilon, \beta' - \varepsilon; T)}{2\,T} \quad \text{für } n > N(\varepsilon).$$

Hieraus folgt

$$\varliminf_{T \to \infty} \frac{N(\alpha', \beta'; T)}{2\,T} \geqq \lim_{T \to \infty} \frac{N_n(\alpha' + \varepsilon, \beta' - \varepsilon; T)}{2\,T} = \frac{1}{2\,\pi}\left(\varphi_n'(\beta' - \varepsilon - 0) - \varphi_n'(\alpha' + \varepsilon + 0)\right)$$

für $n > N$, und hieraus für $n \to \infty$ [1]

$$\varliminf_{T \to \infty} \frac{N(\alpha', \beta'; T)}{2\,T} \geqq \frac{1}{2\,\pi}\left(\varphi'(\beta' - \varepsilon - 0) - \varphi'(\alpha' + \varepsilon + 0)\right)$$

für jedes ε, also für $\varepsilon \to 0$

$$\varliminf_{T \to \infty} \frac{N(\alpha', \beta'; T)}{2\,T} \geqq \frac{1}{2\,\pi}\left(\varphi'(\beta' - 0) - \varphi'(\alpha' + 0)\right).$$

Durch Approximation von aussen ergibt sich analog

$$\varlimsup_{T \to \infty} \frac{N(\alpha', \beta'; T)}{2\,T} \leqq \frac{1}{2\,\pi}\left(\varphi'(\beta' + 0) - \varphi'(\alpha' - 0)\right).$$

Wenn α' und β' Differenzierbarkeitspunkte von $\varphi(\sigma)$ sind, gilt also insbesondere

$$\lim_{T \to \infty} \frac{N(\alpha', \beta'; T)}{2\,T} = \frac{1}{2\,\pi}\left(\varphi'(\beta') - \varphi'(\alpha')\right).$$

Wenn es also eine in $[-\infty, \infty]$ grenzperiodische Funktion

[1] Hierbei benutzen wir, dass für jedes σ

$$\varliminf_{n \to \infty} \varphi_n'(\sigma - 0) \geqq \varphi'(\sigma - 0), \quad \varlimsup_{n \to \infty} \varphi_n'(\sigma + 0) \leqq \varphi'(\sigma + 0),$$

was man aus der Konvexität leicht entnimmt.

$f(s)$ der Grenzperiode ip gibt, die in jedem Punkt von S eine zweifache Nullstelle hat und sonst von Null verschieden ist, muss nach Satz A für beliebige gemeinsame Differenzierbarkeitspunkte von $\varphi(\sigma)$ und $\varphi_f(\sigma)$ die Relation

$$\frac{1}{2\pi}\left(\varphi'(\beta') - \varphi'(\alpha')\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\varphi_f'(\beta') - \varphi_f'(\alpha')\right)$$

erfüllt sein, woraus folgt, dass $\varphi(\sigma) - \varphi_f(\sigma)$ linear sein muss, etwa $= \varkappa + \lambda\sigma$. Dabei muss offenbar λ zum Modul M gehören; denn nach Satz B liegt der konstante Wert von $\varphi_f'(\sigma)$ für $\sigma < \gamma$ in M. Setzen wir dann $g(s) = f(s)\,e^{\varkappa + \lambda s}$, so ist $g(s)$ offenbar grenzperiodisch der Grenzperiode ip, und es gilt $\varphi_g(\sigma) = \varphi_f(\sigma) + \varkappa + \lambda\sigma = \varphi(\sigma)$. Zum Beweis des Satzes 2 genügt es also, eine grenzperiodische Funktion $f(s)$ der Grenzperiode ip zu konstruieren, welche in jedem Punkt von S eine zweifache Nullstelle hat und sonst von Null verschieden ist.

§ 4.

Konstruktion einer zugehörigen Funktion.

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit der Funktion

$$1 - e^{as^2},$$

wo a eine Konstante > 0 ist. Diese Funktion hat für $s = 0$ eine doppelte Nullstelle und für $s = \sqrt{\frac{2g\pi i}{a}}$, g ganz $\neq 0$, einfache Nullstellen.

Sei im Streifen $\gamma \leqq \sigma \leqq \delta$ eine Punktmenge $\{s_k\}$ mit $s_k = \sigma_k + ikq$ $\gamma \leqq \sigma_k \leqq \delta$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ gegeben. Dann ist das unendliche Produkt

$$\prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{a(s-s_k)^2}\right)$$

in jeder beschränkten Punktmenge der Ebene gleichmässig konvergent. Die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| e^{a(s-s_k)^2} \right|$$

ist nämlich in jeder beschränkten Punktmenge der Ebene gleichmässig konvergent, was daraus folgt, dass gleichmässig in jeder beschränkten Punktmenge der Ebene

$$\left| e^{a(s-s_k)^2} \right| = e^{a(\sigma-\sigma_k)^2} e^{-a(t-kq)^2} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

ist.

Ferner gilt, dass zu jedem Streifen $\gamma^* \leqq \sigma \leqq \delta^*$ eine von der Menge $\{s_k\}$ unabhängige Konstante K mit der Eigenschaft existiert, dass der absolute Betrag des Produktes in $\gamma^* \leqq \sigma \leqq \delta^*$ diese Konstante K nicht übersteigt. Dies folgt sofort daraus, dass jeder Wert, den ein Produkt annimmt, von einem anderen (oder vielleicht demselben) im Rechteck $\gamma^* \leqq \sigma \leqq \delta^*, 0 \leqq t \leqq q$ angenommen wird. Ferner bemerken wir, dass diese Überlegungen auch Gültigkeit behalten, wenn man einen oder mehrere Faktoren weglässt.

Wir betrachten ein bestimmtes dieser Produkte

$$p(s) = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{a(s-s_k)^2}\right), \quad s_k = \sigma_k + ikq.$$

Wir wollen zeigen, dass man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ und einem vorgegebenen Streifen $\gamma^* \leqq \sigma \leqq \delta^*$ ein $\eta > 0$ so finden kann, dass jedes Produkt

$$p^*(s) = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{a(s-s'_k)^2}\right),$$

wo man jedes σ_k um weniger als η geändert hat, wo also

$|\sigma_k' - \sigma_k| = \eta(k) < \eta$, im Streifen $\gamma^* \leqq \sigma \leqq \delta^*$ von dem ursprünglichen um weniger als ε abweicht.

Es gilt nämlich

$$\left|p(s) - p^*(s)\right| < K \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \left| e^{a(s-s_k)^2} - e^{a(s-s_k')^2} \right|$$

$$\leqq K\eta \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \left| 2a(s-s_k'')\, e^{a(s-s_k'')^2} \right|$$

mit $s_k'' = \sigma_k'' + ikq$, $\sigma_k'' = \sigma_k + \theta(\sigma_k' - \sigma_k)$ $0 < \theta < 1$ [1].

Hieraus folgt sofort, dass die Funktion

$$f_a(s) = \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{a(s-s_k)^2}\right),$$

wo die s_k die Werte der Menge S (§ 3) sind, in $[-\infty, \infty]$ grenzperiodisch der Grenzperiode ip ist; denn diese Funktion lässt sich ja beliebig gut durch periodische Funktionen annähern, deren Perioden sämtlich rationale Vielfache der Zahl ip sind. Diese approximierenden Funktionen sind die Produkte, die entstehen, wenn man die s_k die Punkte der Mengen S_n (§ 3) durchlaufen lässt. Die Menge S_n hat ja die Periode $iQ_n q$, die gerade ein rationales Vielfaches von ip ist.

Die gewünschte Funktion entsteht nun durch einen Grenzübergang. Wir wählen zwei Folgen von Zahlen

[1] Dies folgt mit Hilfe der Umformung

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} a_\nu - \prod_{\nu=0}^{\infty} b_\nu = (a_0 - b_0)\prod_{\nu=1}^{\infty} a_\nu + b_0\left(\prod_{\nu=1}^{\infty} a_\nu - \prod_{\nu=1}^{\infty} b_\nu\right) =$$

$$(a_0 - b_0)\prod_{\nu=1}^{\infty} a_\nu + b_0\left((a_1 - b_1)\prod_{\nu=2}^{\infty} a_\nu + b_1\left(\prod_{\nu=2}^{\infty} a_\nu - \prod_{\nu=2}^{\infty} b_\nu\right)\right) =$$

$$(a_0 - b_0)\prod_{\nu=1}^{\infty} a_\nu + (a_1 - b_1)\, b_0 \prod_{\nu=2}^{\infty} a_\nu + \cdots.$$

$$\delta < \delta_1 < \delta_2 < \cdots \quad \text{und} \quad \cdots < \gamma_2 < \gamma_1 < \gamma$$

mit $\delta_n \to \infty$ und $\gamma_n \to -\infty$. Die Zahl a wird so klein gewählt, dass die Funktion

$$F_0(s) = f_a(s) = \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{a(s-s_\nu)^2}\right), \; s_\nu \varepsilon S$$

in $\gamma \leqq \sigma \leqq \delta$ doppelte Nullstellen in den Punkten von S hat und sonst in $\gamma_1 \leqq \sigma \leqq \delta_1$ nullstellenfrei ist. Analog werde a_n für jedes n so klein gewählt, dass die Funktion $f_{a_n}(s)$ in $\gamma \leqq \sigma \leqq \delta$ Nullstellen in den Punkten von S hat und sonst in $\gamma_{n+1} \leqq \sigma \leqq \delta_{n+1}$ nullstellenfrei ist. Bilden wir nun

$$\frac{f_a(s)}{f_{a_1}(s)},$$

so ist diese Funktion grenzperiodisch der Grenzperiode ip in $[\gamma_2, \delta_2]$ und nullstellenfrei in $\gamma_1 \leqq \sigma \leqq \delta_1$. Nach Satz B gilt also für $\gamma_1 < \sigma < \delta_1$

$$\frac{f_a(s)}{f_{a_1}(s)} = e^{\lambda_1 s + h_1(s)},$$

wo λ_1 im Modul M liegt und $h_1(s)$ grenzperiodisch der Grenzperiode ip ist. Es ist daher möglich ein Exponentialpolynom $h_1^*(s)$ mit Exponenten aus M, also eine analytische grenzperiodische Funktion der Grenzperiode ip zu bestimmen, für welche

$$\left| h_1(s) - h_1^*(s) \right| < \frac{1}{2}$$

für $\gamma < \sigma < \delta$ gilt. Setzen wir nun

$$F_1(s) = f_{a_1}(s)\, e^{\lambda_1 s + h_1^*(s)},$$

so ist diese Funktion eine in $[-\infty, \infty]$ analytische grenzperiodische Funktion der Grenzperiode ip, die in $\gamma_2 \leqq \sigma < \gamma$, $\delta < \sigma \leqq \delta_2$ nullstellenfrei ist.

Bilden wir

$$\frac{F_1(s)}{f_{a_2}(s)},$$

so ist diese Funktion grenzperiodisch der Grenzperiode ip in $[\gamma_3, \delta_3]$ und nullstellenfrei in $\gamma_2 \leqq \sigma \leqq \delta_2$. Dann gilt für $\gamma_2 < \sigma < \delta_2$

$$\frac{F_1(s)}{f_{a_2}(s)} = e^{\lambda_2 s + h_2(s)},$$

und wir wählen $h_2^*(s)$ derart, dass

$$\left| h_2(s) - h_2^*(s) \right| < \frac{1}{2^2}$$

für $\gamma_1 < \sigma < \delta_1$ gilt. Setzen wir nun

$$F_2(s) = f_{a_2}(s)\, e^{\lambda_2 s + h_2^*(s)},$$

so ist diese Funktion eine in $[-\infty, \infty]$ analytische grenzperiodische Funktion der Grenzperiode ip, die in $\gamma_3 \leqq \sigma < \gamma$, $\delta < \sigma \leqq \delta_3$ nullstellenfrei ist.

Indem man auf diese Weise fortfährt, erhält man eine Folge von Funktionen

$$F_0(s), F_1(s), \ldots, F_n(s), \ldots,$$

die alle in $[-\infty, \infty]$ grenzperiodisch sind und für welche $F_n(s)$ in $\gamma_{n+1} \leqq \sigma < \gamma$, $\delta < \sigma \leqq \delta_{n+1}$ nullstellenfrei ist. Ferner gilt

$$F_{n+1}(s) = F_n(s)\, e^{h_{n+1}^*(s) - h_{n+1}(s)}$$

für $\gamma_{n+1} < \sigma < \delta_{n+1}$, wobei

$$\left| h_{n+1}(s) - h_{n+1}^*(s) \right| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

für $\gamma_n < \sigma < \delta_n$ ist. Diese Folge strebt nun offenbar gleichmässig in $[-\infty, \infty]$ gegen eine Grenzfunktion

$$F(s);$$

denn für beliebige γ' und δ' gilt ja $\gamma_n < \gamma'$ und $\delta_n > \delta'$ für $n \geqq N$, und man hat

$$F_{n+p}(s) = F_n(s)\, e^{(h^*_{n+p}(s) - h_{n+p}(s)) + \cdots + (h^*_{n+1}(s) - h_{n+1}(s))}$$

für $\gamma_n < \sigma < \delta_n$.

Diese Funktion $F(s)$ ist also eine in $[-\infty, \infty]$ grenzperiodische Funktion der Grenzperiode ip, die in jedem Punkt von S eine zweifache Nullstelle besitzt und sonst von Null verschieden ist. Hiermit ist der Beweis des Satzes 2 vollendet.

VERZEICHNIS DER ZITIERTEN LITERATUR

H. Bohr: [1] Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. III. Dirichletentwicklung analytischer Funktionen. Acta math. 47 (1926), S. 237—281.

H. Bohr: [2] Kleinere Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. V. Über den Quotienten zweier analytischer fastperiodischer Funktionen. Math.-fys. Medd., Danske Vidensk. Selsk. 13, H. 8 (1935), S. 1—13.

B. Jessen: [1] Über die Nullstellen einer analytischen fastperiodischen Funktion. Eine Verallgemeinerung der Jensenschen Formel. Mathematische Annalen 108, (1933), S. 485—516.

INHALTSVERZEICHNIS

Indleveret til Trykkeriet den 19. Marts 1938.
Færdig fra Trykkeriet den 9. Maj 1938.